BLOQUE I: PRELIMINARES

Tema 2

ALGUNAS NOCIONES DE TEORÍA DE CONJUNTOS,
RELACIONES Y FUNCIONES

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

Alessandra Gallinari

URJC

Contenido

Nociones de teoría de conjuntos
- Inclusión e igualdad de conjuntos
- Operaciones con conjuntos
- Partes de un conjunto y propiedades de las operaciones con conjuntos
- Cardinal de un conjunto

Relaciones binarias
- Relaciones de equivalencia
- Relaciones de orden
- Mínimos y máximos de un conjunto

Relaciones $n-$arias

Funciones
- Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Nociones de teoría de conjuntos

Este capítulo es un repaso de algunas nociones de teoría de conjuntos y de las definiciones básicas de relaciones y funciones.
En esta exposición presentaremos sólo aquellos conceptos indispensables para el estudio de la asignatura de Lógica Matemática.

Nociones de teoría de conjuntos

La lógica y la teoría de conjuntos están estrechamente relacionadas.
De hecho en un principio se pensó que toda propiedad $P(x)$ (todo predicado, en el lenguaje de la lógica de primer orden) llevaba asociado un "conjunto",

$$\{x : P(x)\}.$$

El conjunto obtenido estaría formado por los elementos a del universo de discurso U que satisfacen la propiedad $P(x)$, es decir, tales que se pueda afirmar que $P(x)$ es verdadera si $x = a$.

Nociones de teoría de conjuntos

Así, por ejemplo, sea nuestro universo de discurso "los seres humanos" y sea $P(x)$ la propiedad de un genérico ser humano x de medir al menos 1,70 metros de altura.
Dado un particular ser humano a, es posible determinar si la altura de a es al menos 1,70 metros, es decir, si a pertenece al conjunto $\{x : P(x)\}$.

Nociones de teoría de conjuntos

En 1903 Bertrand Russell propuso el siguiente ejemplo de "conjunto" (según la definición de conjunto de su época)

$$A = \{x : x \notin x\},$$

y preguntó si $A \in A$.
De la definición de A se sigue que $A \in A$ implica que $A \notin A$ y, además, que $A \notin A$ implica que $A \in A$. Por tanto se obtiene la contradicción: $A \in A$ si y sólo si $A \notin A$.
El ejemplo de Russell muestra que no toda propiedad determina los elementos de un conjunto.

Nociones de teoría de conjuntos

La primera de las restricciones es el *axioma de especificación:* una propiedad por sí sola no determina un conjunto, sino que selecciona elementos de un conjunto dado al que es necesario referirse.
Para no incurrir en contradicción con el axioma de especificación, es necesario asumir la no existencia del "conjunto universal U," el conjunto de todos los conjuntos. En efecto se puede demostrar que si U fuera un conjunto también $A = \{x \in U : x \notin x\}$ tendría que ser un conjunto. Así que la paradoja de Russell no se podría resolver.

Nociones de teoría de conjuntos

En respuesta a la paradoja de Russell, se propusieron varias formulaciones axiomáticas de la teoría de conjuntos. En nuestra exposición, utilizaremos reglas de construcción de conjuntos formuladas en términos de la lógica de predicados, a partir de los conceptos primitivos de conjunto y pertenencia (Zermelo-Fraenkel,1922).

Nociones de teoría de conjuntos

Los conceptos de **conjunto** y de **pertenencia** de un elemento a un conjunto son conceptos *primitivos*, es decir, no se definen.
Diremos que un **conjunto** A es una colección (familia, clase), finita o infinita, de objetos de un universo U, tal que para todo objeto x se pueda determinar si x pertenece a A. Los objetos de un conjunto serán sus **elementos.** Si x pertenece al conjunto A, se escribirá $x \in A$. Si x no pertenece a A, se escribirá $x \notin A$.

Nociones de teoría de conjuntos

Ejemplos:

$\mathbb{N} := \{1, 2, \cdots\}$ es el conjunto de los números naturales,
$\mathbb{Z} := \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ es el conjunto de los números enteros,
$\mathbb{F} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad q \neq 0\}$ es el conjunto de las fracciones de números enteros,
$A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$ es el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 1 = 0$.

Notación: los símbolos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotarán, respectivamente, el conjunto de los números racionales, reales y complejos.

Inclusión e igualdad de conjuntos

- **Inclusión:** Si todo elemento x de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, se dirá que A está contenido en B o que A es un **subconjunto** de B (y se escribirá $A \subseteq B$ ó $B \supseteq A$).
- **Inclusión propia:** Si A es un subconjunto de B y existe un elemento de B que no pertenece a A, entonces A es un **subconjunto propio** de B : $A \subsetneq B$ ó $A \subset B$.
- **Igualdad:** Dos conjuntos A y B son **iguales** si contienen los mismos elementos. Por ejemplo, los conjuntos $A = \{-2, 1, 0, -7\}$ y $B = \{-7, 1, 0, -2\}$ son iguales.

Inclusión e igualdad de conjuntos

Nota importante: para demostrar que dos conjuntos A y B son iguales, es necesario verificar las dos siguientes condiciones:

$$1) A \subseteq B \tag{1}$$
$$2) B \subseteq A \tag{2}$$

Ejemplos: 1) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 = 0\}$ y $B = \{-2, 1\}$.
Los elementos de A son las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$, es decir, son los números $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$. Ya que $x_1 \in B$ y $x_2 \in B$, $A \subseteq B$. Ahora está claro que también $B \subseteq A$. Por tanto, $A = B$.
2) Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, a, d, b\}$, entonces $A = B$.

Inclusión e igualdad de conjuntos

- **Conjunto vacío:** El **conjunto vacío** $\emptyset$ es el conjunto que no tiene elementos.

Nota: el conjunto $\emptyset$ **no es igual** al conjunto $A = \{\emptyset\}$, pués A tiene un elemento, el conjunto vacío.
Ejemplo: Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$. Entonces $A = \emptyset$.

Inclusión e igualdad de conjuntos

Proposición Sea A un conjunto cualquiera. Entonces $\emptyset \subseteq A$.
La justificación de esta proposición es inmediata, ya que (como estudiaremos muy pronto) toda deducción con una premisa falsa es verdadera.

Operaciones con conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, es posible construir nuevos conjuntos por medio de las siguientes operaciones:

- la **unión** de A y B es el conjunto $A \cup B$ de todos los elementos de A o de B, es decir

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{ó} \quad x \in B\},$$

Operaciones con conjuntos

- la **intersección** de A y B es el conjunto $A \cap B$ de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B, es decir

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \quad y \quad (x \in B)\}.$$

Si A y B no tienen elementos en común, entonces $A \cap B = \emptyset$ y se dirá que A y B son **disjuntos**,

Operaciones con conjuntos

- el **complemento (relativo) de** B **respecto de** A es el conjunto $A \backslash B$ de todos los elementos de A que no pertenecen a B, es decir

$$A \backslash B = \{x : (x \in A) \quad y \quad (x \notin B)\}.$$

Operaciones con conjuntos

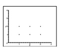
- el **producto cartesiano** de dos conjuntos *no vacíos* A y B es el conjunto de todos pares ***ordenados*** (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, es decir

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \quad y \quad (b \in B)\}.$$

Para representar gráficamente un producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos, se puede utilizar un sistema de ejes. Los elementos de A se representan por medio de puntos del eje de las abscisas y los elementos de B por medio de puntos del eje de las ordenadas. Entonces los elementos de $A \times B$ son todos los puntos de "coordenadas" (a, b).

Operaciones con conjuntos

Por ejemplo, sean $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{a, b\}$. La siguiente figura es una representación gráfica (obtenida con el sistema Maple sustituyendo las letras por números: $x = 1, y = 2, z = 3, a = 1, b = 2$) de $A \times B$.



Partes de un conjunto

Si A es un conjunto, se llama **conjunto de las partes de A,** $P(A)$, al nuevo conjunto cuyos elementos son exactamente los subconjuntos de A.

Nota: Para todo conjunto A, $P(A)$ es siempre no vacío, ya que $\emptyset \in P(A)$.
Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c\}$. Entonces

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Propiedades de las operaciones con conjuntos

Sean A, B y C tres conjuntos. Las principales propiedades de las operaciones con conjuntos son las siguientes:
1) **idempotencia** de la unión y de la intersección:

$$A \cup A = A \tag{3}$$
$$A \cap A = A \tag{4}$$

Propiedades de las operaciones con conjuntos

2) **conmutatividad** de la unión y de la intersección:

$$A \cup B = B \cup A \tag{5}$$
$$A \cap B = B \cap A \tag{6}$$

3) **asociatividad** de la unión y de la intersección:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{7}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{8}$$

Propiedades de las operaciones con conjuntos

4) **distributividad** de la unión respecto de la intersección y de la intersección respecto de la unión:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{9}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{10}$$

5)

$$A \cup \emptyset = A \tag{11}$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \tag{12}$$

Propiedades de las operaciones con conjuntos

6) **Leyes de De Morgan** (para conjuntos):

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B) \tag{13}$$
$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B) \tag{14}$$

7)

$$(A \backslash B) \cup B = A \cup B \tag{15}$$
$$(A \backslash B) \cap B = \emptyset \tag{16}$$
$$A \backslash (A \backslash B) = A \cap B \tag{17}$$

Unión e intersección de una familia arbitraria de conjuntos

Las definiciones de unión y de intersección de dos conjuntos se pueden extender a una familia arbitraria de conjuntos. Si J es un conjunto fijado y asociamos a cada $j \in J$ un conjunto A_j, entonces obtenemos la familia de conjuntos $\{A_j\}_{j\in J}$.
La unión de los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j\in J}$ es el nuevo conjunto

$$A = \bigcup_{j\in J} A_j$$

tal que x es un elemento de A si x es un elemento de al menos uno de los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j\in J}$.

Unión e intersección de una familia arbitraria de conjuntos

La intersección de los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j\in J}$ es el nuevo conjunto

$$A = \bigcap_{j\in J} A_j$$

tal que x es un elemento de A si x es un elemento de todos los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j\in J}$.

Unión e intersección de una familia arbitraria de conjuntos

Ejemplo: Si $J = \mathbb{N}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_n = \mathbb{N}$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_n = \{1\}$.

Cardinal de un conjunto

El **cardinal** de un conjunto finito A, $Card(A)$, es el número de elementos de A. Si A es un conjunto infinito se escribirá $Card(A) = \infty$.
Cardinal de la unión: Sean A y B dos conjuntos finitos cualesquiera, entonces

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) \leq$$

$$\leq Card(A) + Card(B)$$

Si $A \cap B = \emptyset$, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.

Cardinal de un conjunto

Observación: Se puede comprobar que si A es un conjunto finito con $Card(A) = n$, entonces $Card(P(A)) = 2^n$.
Ejemplos: 1) $Card(\mathbb{N}) = \infty$
2) Sean $A = \{-2, 0, 3, 17\}$ y $B = \{-7, 0, 5, 17, 18\}$. Entonces, $A \cup B = \{-7, -2, 0, 3, 5, 17, 18\}$ y $A \cap B = \{0, 17\}$. Luego, se verifica que

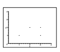
$$7 = Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) = 4 + 5 - 2.$$

Relaciones binarias

Definición: Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una **relación binaria** entre A y B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in R$ se dirá que a y b están relacionados y se escribirá aRb.

Relaciones binarias

Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ y $R = \{(a, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$. Entonces aRd, bRe, cRd y cRe.



Relaciones binarias

Si $R \subseteq A \times A$ (es decir, si $A = B$), se dirá que R es una **relación binaria en A**.
En las siguientes definiciones vamos a emplear el cuantificador universal $\forall$ y el símbolo de implicación $\rightarrow$ de la lógica de predicados, que estudiaremos en detalle. La notación $\forall x \in A$ quiere interpretarse como "para todo elemento x del conjunto A".

Relaciones binarias

Una relación R en un conjunto no vacío A puede ser:

- R1) **reflexiva:** $\forall x \in A \quad xRx$
- R2) **simétrica:** $\forall x, y \in A \quad xRy \rightarrow yRx$
- R3) **antisimétrica:** $\forall x, y \in A \quad (xRy \quad \text{y} \quad yRx) \rightarrow x = y$
- R4) **transitiva:** $\forall x, y, z \in A \quad (xRy \quad \text{y} \quad yRz) \rightarrow xRz$

Relaciones binarias

Para estudiar las propiedades de una relación binaria sobre un conjunto A es conveniente representar gráficamente la relación (ver ejercicio 6).
Observación: Las únicas relaciones binarias en un conjunto no vacío A que sean al mismo tiempo simétricas y antisimétricas son tales que $R \subseteq \{(x, y) : x = y\}$.

Relaciones binarias

Ejemplos: 1) Sea A el conjunto de las personas y $R = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ es el padre de } b\}$. Esta relación no tiene ninguna de las propiedades $R1, R2$ y $R4$.
2) En el conjunto de las partes $P(A)$ de un conjunto A, la relación de inclusión $R = \{(B, C) \in P(A) \times P(A) : B \subseteq C\}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
3) En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, la relación $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ es par}\}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Relaciones binarias

4) En el conjunto de las rectas del plano real, la relación "r es ortogonal a s" no es reflexiva, es simétrica y no es transitiva.

Definición: Si $R \subseteq A \times B$ es una relación binaria, se denomina

- **dominio** de R al conjunto

$$dom(R) = \{x \in A : \exists y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq A$$

- **imagen directa (o rango)** de R al conjunto

$$Im(R) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq B$$

Relaciones binarias

- **imagen inversa (o recíproca)** de un subconjunto C de B al conjunto

$$R^{-1}(C) = \{x \in A : \exists y \in C \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq A$$

- **codominio** de R al conjunto B.

Relaciones de equivalencia

Definición: Una relación binaria R en un conjunto no vacío A se denomina **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva.
Si R es una relación de equivalencia en A y $a, b \in A$ son tales que aRb, se escribirá $a \sim b$.
Si $a \in A$ y $\sim$ es una relación de equivalencia en A, se puede definir un subconjunto $C(a)$ de A denominado **clase de equivalencia de** a :

$$C(a) = \{x \in A : x \sim a\}. \tag{18}$$

Notar que $C(a)$ no es vacío ya que toda relación de equivalencia es reflexiva.

Relaciones de equivalencia

Sea b otro elemento de A. Puede ocurrir sólo una de las siguientes situaciones:

$$\text{si } a \sim b, \text{ entonces } C(a) = C(b), \tag{19}$$
$$\text{si } a \nsim b, \text{ entonces } C(a) \cap C(b) = \emptyset. \tag{20}$$

Relaciones de equivalencia

Por tanto, si consideramos el conjunto de las *distintas* clases de equivalencias, este conjunto representa una *partición* de todo A entre subconjuntos disjuntos y se denomina *conjunto cociente*.

Relaciones de equivalencia

Ejemplos: 1) La relación $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ es par}\}$, es una relación de equivalencia y $\mathbb{Z} = C(0) \cup C(1)$. $C(0)$ es el conjunto de todos los enteros pares y $C(1)$ de los enteros impares.
2) En el conjunto de las rectas del plano real, la relación "r es paralela a s" es una relación de equivalencia. Para toda recta r, $C(r)$ representa a la **dirección** determinada por r.

Relaciones de equivalencia

3) **Números racionales**
En el conjunto $\mathbb{F}$ de las fracciones $\mathbb{F} := \{p/q : p, q \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad q \neq 0\}$, para todo par de fracciones $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ y $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$, se define la relación de equivalencia R como $r_1 \sim r_2 \leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$. El conjunto de las clases de equivalencia es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Relaciones de orden

Definición: Una relación R en un conjunto (no vacío) A es una **relación de orden** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Si R es una relación de orden en A y $x, y \in A$ son tales que xRy, se escribirá $x \leq y$.
Una relación de orden R sobre A tal que cada dos elementos x e y de A se pueden comparar (es decir, $\forall x, y \in A$, xRy ó yRx) es una **relación de orden total.** Si una relación de orden R no es de orden total, entonces es una **relación de orden parcial.**

Relaciones de orden

Ejemplos: 1) En el conjunto de los números reales la relación "menor o igual que" ($\leq$) es una relación de orden total. En particular, sea $A := \{1, 2, 3, 4, 12\}$. El orden del conjunto A dato por $\leq$ se puede representar con un grafo orientado:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 12$$

2) En el conjunto de las partes de un conjunto A, la relación de inclusión ($\subseteq$) es una relación de orden parcial.

Relaciones de orden

3) En el conjunto de los números naturales la relación "ser divisor de", $|$, es una relación de orden parcial. En particular, para el mismo conjunto $A := \{1, 2, 3, 4, 12\}$ del ejemplo 1), la relación $|$ se puede representar por medio del siguiente grafo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 3 & & & \\ & \nearrow & & & & \searrow & \\ 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 12 \end{array}$$

Relaciones de orden

A toda relación de orden "$\leq$" en A se le puede asociar una **relación de orden estricto,** definida por

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y \quad \text{y} \quad x \neq y. \tag{21}$$

La relación $<$ es tal que
i) no existen elementos $x, y \in A$ tales que $x < y$ e $y < x$ simultáneamente,
ii) es transitiva.

Relaciones de orden

Viceversa, a partir de una relación R en A que cumple las condiciones i) y ii), se puede definir la relación de orden

$$x \leq y \leftrightarrow ((x < y)(x = y)).$$

Relaciones de orden

Son muy importantes las **relaciones de orden estricto y total,** es decir, las relaciones que satisfacen las siguientes dos propiedades:

- **transitiva:** $\forall x, y, z \in A, \quad (x < y \quad e \quad y < z) \to x < z$.
- **de tricotomía:** $\forall x, y \in A$, se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:

$$x = y, \quad x < y, \quad y < x.$$

Relaciones de orden

Ejemplos:
1) En el conjunto de los números reales la relación "menor que" es una relación de orden estricto y total.
2) En el conjunto de las partes de un conjunto A, la relación de inclusión propia (es decir, $\forall B, C \in P(A),\ B < C$ si $B \subseteq C$ y $B \neq C$) es una relación de orden estricto parcial.

Mínimos y máximos de un conjunto

Definición:
Si $\leq$ es una relación de orden en un conjunto A y $B \subseteq A$, un elemento $m \in B$ es **un mínimo** de B si $\forall x \in B \quad m \leq x$. Un elemento $M \in B$ es **un máximo** de B si $\forall x \in B \quad x \leq M$.
Se puede comprobar fácilmente que el mínimo y el máximo de un conjunto existen, entonces son únicos.

Mínimos y máximos de un conjunto

Ejemplos: 1) $\emptyset$ es el mínimo y A el máximo del conjunto de las partes $P(A)$ del conjunto A, ordenado con la inclusión.
2) -1 es el mínimo y 4 es el máximo del intervalo (cerrado) $[-1, 4] \subseteq \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ tiene el orden "menor o igual que."
3) En el conjunto de los números naturales ordenados por "ser divisor de," 1 es un mínimo, pero no existe un máximo.

Relaciones $n-$arias

Definición: Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos no vacíos. Una **relación de aridad** n **o** $n-$**aria** es un subconjunto R del producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Si $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ se dirá que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ están relacionados.
Ejemplo: Sean $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e\}$ y $A_3 = \{1, 2\}$.
$R = \{(a, d, 1), (b, e, 1), (c, d, 2), (c, e, 2)\}$ es una relación ternaria sobre $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Funciones

Una función (o aplicación) $(n+1)-$aria, $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \longrightarrow B$, de un conjunto no vacío $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ a un conjunto no vacío B se puede definir como "una regla de correspondencia que asigna a cada elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$ un único elemento $b = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$."
Esta definición es muy intuitiva, pero no explica el término "regla de correspondencia" con suficiente claridad.

Funciones

La siguiente definición es más general e identifica el concepto de función con una clase particular de relaciones binarias.
Definición: Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y B conjuntos no vacíos. Una **función (o aplicación)** $(n+1)-$**aria** $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \longrightarrow B$ es una relación $(n+1)-$aria $f \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times B$ tal que
$f1)$ $dom(f) = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$,
$f2)$ si $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in dom(f)$ existe un **único** $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$ tal que $(a_1, a_2, \ldots, a_n, f(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \in f$.

Funciones

Entonces una función $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \longrightarrow B$ es una relación entre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ y B tal que a cada elemento de $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ corresponde un único elemento $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ del codominio B.
Si $(a_1, a_2, \ldots, a_n, f(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \in f$, se dirá que $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la **imagen de** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ por la función f o el **valor de** f en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Si el dominio de una función está compuesto de un sólo conjunto A, entonces la función es **binaria**.

Funciones

Test de la recta vertical: Una relación $R \subseteq A \times B$ es una función si y sólo si
1) $dom(R) = A$ y
2) su gráfica corta a cada "recta vertical" en un punto a lo más.

Funciones

Ejemplos: 1) La relación binaria definida por: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ y $R = \{(a, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$ no es una función.
2) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$, es tal que $dom(f) = \mathbb{R}$ y $Im(f) = \mathbb{R}$.
3) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, es tal que $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} (= [0, \infty))$. En este caso, $f^{-1}([0, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ y $f^{-1}((-2, 0]) = \{0\}$.
4) La función $f(x) = \sqrt{x}$ está definida sólo para números reales no negativos, entonces $dom(f) = Im(f) = [0, \infty)$.
5) El dominio de la función $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ es $\mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.

Funciones

Definición: Dos funciones $f, g \subseteq A \times B$ son **iguales** si y sólo si:
a) $dom(f) = dom(g)$
b) $\forall x \in dom(f),\ f(x) = g(x)$.
Ejemplo: Las funciones $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = x^2$, $\forall x > 0$ no son iguales, ya que $dom(f) \neq dom(g)$.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición: Una función $f : A \longrightarrow B$ es

- **inyectiva:** si $\forall x, y \in A$,
  $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$ o, equivalentemente,
  $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$.
  A elementos distintos x e y de A corresponden elementos distintos $f(x)$ y $f(y)$ de B.
- **sobreyectiva:** si $f(A) = B$ o, equivalentemente, si
  $\forall b \in B\ \exists a \in A$ tal que $f(a) = b$.
  Cada elemento de B es el imagen de al menos un elemento de A.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

- **biyectiva:** si es inyectiva y sobreyectiva.
  Por tanto, una función $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si
  $\forall b \in B$ $\exists!$(existe un único) $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Test de la recta horizontal: Una función f es inyectiva si y sólo si cada "recta horizontal" corta la gráfica de f en un punto a lo más.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Ejemplos: 1) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$, es biyectiva.
2) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, no es ni inyectiva, ni sobreyectiva.
3) La función $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ definida por $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$, es biyectiva.
4) La función **proyección** sobre A, $p : A \times B \longrightarrow A$, definida por $p(a, b) = a$, es sobreyectiva y no es inyectiva (salvo que $card(B) = 1$).
5) La función **identidad** en A, $Id_A : A \longrightarrow A$, definida por $Id_A(a) = a$, es biyectiva.
Observación: Si $f : A \longrightarrow B$ es una función inyectiva, entonces la función $f : A \longrightarrow f(A)$ es biyectiva.

Composición de funciones

Definción: Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones.
La función **composición (o compuesta)** de f y g es la función $g \circ f : A \longrightarrow C$ definida por $\forall a \in A, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a))$.
Entonces

$$g \circ f = \{(a, g(f(a))) : a \in A\} \subseteq A \times C.$$

Composición de funciones

Ejemplos:
a) Siendo $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos, sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función $f(x) = x^2 + 1$ y sea $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función $g(x) = \sqrt{x}$.
Entonces, la función $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es la función $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Composición de funciones

b) Sean D el conjunto de las personas, M el subconjunto de las madres y A el subconjunto de las abuelas.
Definimos las funciones $f : D \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow A$ que asocian a toda persona y a toda madre, respectivamente, su propia madre.
En este caso la función $g \circ f : D \longrightarrow A$ resulta ser la función que asocia a toda persona su abuela materna.